Муниципальный этап ВсОШ 2025-2026 уч.г.
математика 9 класс критерии проверки
Работа рассчитана на 240 минут

1. В зоопарке есть 10 слонов и огромные чашечные весы. Известно, что если любые четыре слона встанут на левую чашу весов, а любые три на – правую, то левая чаша перевесит. Пять слонов встали на левую чашу и четыре – на правую. Обязательно ли левая чаша перевесит?

Ответ: не обязательно.

Решение. Приведем контрпример. Пусть пять слонов весят по 7 тонн, а еще пять - по 9 тонн каждый. Тогда любые четыре слона на левой чаше весов вместе весят не менее, чем 4·7=28 тонн, а любые три слона на правой – не более, чем 3·9= 27 тонн, и левая чаша действительно перевесит.

Но если пять «легких» слонов общей массой 5·7=35 тонн встанут на левую чашу весов, а четыре «тяжелых» слона общей массой 4·9=36 тонн на правую, то перевесит правая чаша.

Существует и много других контрпримеров. В приведенном примере масса слона правдоподобна. От школьников этого не требуется.

Критерии проверки:

2 балла – приведен любой верный контрпример с доказательством его пригодности;

1 балл - приведен верный контрпример, но не объяснена его пригодность;

0 баллов – приведен верный ответ с неверным контрпримером;

0 баллов – приведен только ответ.

2. Найдите все такие тройки чисел, что каждое число равно квадрату суммы двух остальных.

Ответ: (0, 0, 0); $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.

Решение. Запишем условие алгебраически: $a = (b + c)^2, b = (a + c)^2, c = (a + b)^2$. . Пусть среди чисел есть различные, например, a ≠ b. Вычитая из первого равенства второе, получим $a - b = (b + c)^2 - (a + c)^2 = (b - a)(b + a + 2c)$. Так как $a \neq b$, то из полученного равенства следует, что $a + b + 2c = -1$. Но это невозможно, так как числа a, b, c являются квадратами, поэтому их сумма неотрицательна.

Таким образом $a = b = c$. Тогда каждое уравнение имеет вид $a = (2a)^2$, значит $a = b = c = 0$ или $a = b = c = \frac{1}{4}$.

Критерии проверки:

2 балла – приведено полное обоснованное решение;

1 балл – доказано, что три числа должны быть равными, но допущена ошибка в ответе (например: найдена только одна тройка);

1 балл – верный ответ получен, исходя из предположения, что три числа равны, но это не доказано;

1 балл – приведен только верный ответ;

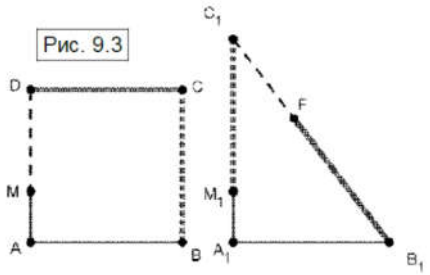
0 баллов – угадана только одна тройка;

0 баллов – задача не решена или решена неверно.

3. Придумайте, как разрезать контур квадрата со стороной 1 на четыре части и сложить из этих частей контур треугольника. Найдите площадь получившегося у вас треугольника. (Толщины контур не имеет. Сгибать и разгибать части нельзя.)

Ответ: $S = \frac{2}{3}$.

Решение. Отметим на стороне AD квадрата $ABCD$ точку M так, что $AM = \frac{1}{3}$. Разрежем контур квадрата в вершинах B, C, D и точке M. Из получившихся частей составим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$ с катетами $A_1B_1 = 1$, $A_1C_1 = A_1M_1 + M_1C_1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$ и гипотенузой $B_1C_1 = B_1F + FC_1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$ (смотри рисунок 9.3).



Существование этого треугольника следует из теоремы, обратной теореме Пифагора. Его площадь равна $S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$.

Покажем как можно было найти этот способ разрезания (участники олимпиады этого делать не обязаны). Пусть $AM = x$. Составим прямоугольный треугольник $A_1B_1C_1$. Один из его катетов $A_1B_1 = 1$, другой $A_1C_1 = A_1M_1 + M_1C_1 = x + 1$. Гипотенуза $B_1C_1 = B_1F + FC_1 = 1 + (1 - x) = 2 - x$. Треугольник с такими сторонами является прямоугольным, если $1^2 + (x + 1)^2 = (2 - x)^2$, откуда $x = \frac{1}{3}$.

Можно доказать, что приведенный способ решения единственный с точностью до равенства треугольников. От участников олимпиады этого не требовалось. Также можно показать, что четыре – это минимальное количество частей, на которые можно разрезать контур квадрата, чтобы сложить треугольник.

Критерии проверки:

3 балла – приведено полное обоснованное решение;

2 балла – верно показано как разрезать и сложить, в том числе указаны размеры частей, но площадь треугольника не найдена или найдена неверно;

1 балл – верно показана схема разрезания, но размеры частей не указаны или не найдены;

0 баллов – задача не решена или решена не верно.

4. Назовём натуральное число интересным, если его можно разложить на натуральные множители, каждый из которых меньше, чем 30. Докажите, что из

10000 интересных чисел всегда можно выбрать два, произведение которых является точным квадратом.

Решение. Рассмотрим разложение интересного числа на простые множители, тогда каждый их этих множителей также меньше, чем 30. Существует ровно 10 простых чисел, меньших тридцати: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. Значит, каждое интересное число можно представить в виде: $2^{n_1}, 3^{n_2}, \dots 29^{n_{10}}$, , где $n_1, n_2, \dots n_{10}$ – натуральные числа или 0.

Число является точным квадратом, если все показатели степеней его простых множителей четные, значит, у двух интересных чисел, произведение которых является квадратом, все показатели степеней с одинаковыми основаниями должны иметь одинаковую четность. Все интересные числа разбиваются на 2^{10} групп, в каждой из которых четности показателей степеней с одинаковым основанием совпадают. Так как $2^{10} = 1024 < 10000$, то по принципу Дирихле из десяти тысяч интересных чисел всегда можно выбрать два числа одной и той же группы. Их произведение будет точным квадратом.

Критерии проверки:

3 балла – приведено полное обоснованное решение;

2 балла – приведено верное в целом решение, содержащее незначительные пробелы или неточности (например, неверно укзано количество простых чисел, меньших 30);

1 балл – верно указан виз разложения интересного числа на простые множители, но дальнейших продвижений нет;

0 баллов – приведено неверное решение или отсутствует.

5. В шахматном турнире в один круг участвовало два мальчика и несколько девочек. Мальчики набрали на двоих 8 очков, в то время как все девочки набрали очков поровну. Сколько девочек могло участвовать в турнире? (Победа 1 очко, ничья – 0,5 очка, поражение – 0 очков).

Ответ: 7 или 14.

Решение. Пусть в турнире участвовало n девочек и каждая из них набрала x очков, тогда сумма всех набранных очков равна nx+8. С другой стороны, каждый из n+2 шахматистов сыграл n+1 партию, поэтому в турнире было сыграно $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ партий.

Так как в каждой партии разыгрывалось одно очко, то количество разыгранных очков равно количеству сыгранных партий. Таким образом, nx+8= $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Преобразовав это равенство, получим 2x=n+3- $\frac{14}{n}$. Так как удвоенное количество очков, набранных каждой девочкой, является целым числом, то количество девочек является натуральным делителем числа 14, то есть 1, 2, 7 или 14.

При n=1 или n=2 правая часть полученного равенства отрицательна. а это невозможно.

Если n=7, то x=4. эта ситуация возможна, например, в случае, когда все партии турнира закончились вничью. Тогда каждый участник набрал 4 очка.

Если n=14, то x=8. Эта ситуация также возможна, например, в случае, когда один мальчик набрал 0 очков (всем проиграл), а остальные партии закончились вничью. Тогда второй мальчик и каждая девочка набрали по 8 очков.

Критерии проверки:

3 балла - приведено полное обоснованное решение;

2 балла - доказано, что количество девочек могло быть 7 или 14, но примеры того. что это реализуется, отсутствуют;

2 балла - доказано, что количество является делителем 14, но указан только один из возможных ответов и приведен пример его реализации;

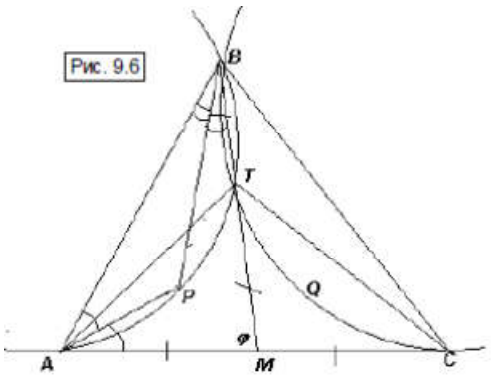
1 балл - приведены оба возможных ответа и проверено, что они удовлетворяют условию;

0 баллов - приведен только ответ;

0 баллов - задача не решена или решена неверно.

6. В остроугольном треугольнике *ABC* проведена медиана *BM*. Точки *P* и *Q* - центры вписанных окружностей треугольников *ABM* и *CBM* соответственно. Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников *ABP* и *CBQ* лежит на отрезке *BM.*

Решение. Отметим на *BM* точку *T* так, что *MA=MT=MC.* Так как $\angle ABC < \angle ATC = 90^\circ$, то эта точка лежит на отрезке *BM* (см.рис. 9.6). Докажем, что описанные окружности треугольников *ABP* и *CBQ* вторично пересекаются в точке *T.*



Действительно, пусть $\angle BMA = \varphi$. Тогда $\angle BPA = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$, так как он образован биссектрисами треугольника *ABM.* С другой стороны, из равнобедренного треугольника *AMT* получим:

$\angle A = \angle T = \frac{180^\circ - \varphi}{2} = 90^\circ - \frac{\varphi}{2}$, тогда $\angle BTA = 90^\circ + \frac{\varphi}{2}$. Равенство углов *BPA* и *BTA* означает, что описанная окружность треугольника *ABP* проходит через *T.* Аналогично доказывается, что через *T* проходит описанная окружность треугольника *CBQ.* Таким образом, эти окружности пересекаются на медиане *BM,* что и требовалось доказать.

Критерии проверки:

3 балла – приведено полное обоснованное решение;

2 балла – приведено верное в целом рассуждение, содержащее незначительные пробелы или неточности, например, не показано, что точка пересечения окружностей лежит на медиане, а не на ее продолжении;
0 баллов – задача не решена или решена неверно.